

Espaces vectoriels normés et applications linéaires continues

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que $R = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ et $\rho = \inf_{\|x\|=1} \|Ax\|$ sont atteints.
 - (b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de A . Est-ce que $R = \max |\lambda_i|$ et $\rho = \min |\lambda_i|$?
 - (c) Si A est symétrique, montrer en considérant le problème d'optimisation sous contrainte $\sup_{\|x\|^2=1} {}^t x A x$ que A admet une valeur propre réelle. En déduire qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.
2. Sur $\mathbb{R}[X]$, comparer les deux normes suivantes : $\|\cdot\|_\infty$ (plus grand coefficient en module) et $\|P\|_h = \sum |a_k|/(1+k)$ (norme OK?).
3. *Théorème de Riesz.*
 - (a) Montrer que les normes sont équivalentes en dimension finie. *Indice : montrer que les compacts pour $\|\cdot\|_\infty$ sont les fermés bornés.*
 - (b) Soit E un evn et $M \subset E$ un sev fermé différent de E . Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u \in E$ de norme 1 tel que $d(u, M) \geq 1 - \epsilon$.
 - (c) En déduire que si E est de dimension infinie, sa boule unité fermée n'est pas compacte. *Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé, OK ?*
4. Soit $E = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Est-ce que l'application $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f$ est continue ? Si oui, est-ce que sa norme est atteinte ? Quid si $E = (L^\infty([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$?
(★) *Pour aller plus loin :* en déduire que $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas réflexif.
5. Soit $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p < q$.
 - (a) On définit

$$\ell^p = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\},$$

muni de la norme $\|(x_n)\|_p = (\sum |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Y a-t-il une inclusion entre ℓ^p et ℓ^q ? Si oui, est-ce que l'injection est continue ?

- (b) Soit μ une mesure finie sur un espace X . Y a-t-il une inclusion entre $L^p(X, \mu)$ et $L^q(X, \mu)$? Si oui, est-ce que l'injection est continue ?

6. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Pour tout $\alpha > 0$ et toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on définit

$$|f|_\alpha = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

On considère ensuite l'espace de Hölder $C^{0, \alpha}(\Omega) = \{f \in C^0(\Omega) \mid |f|_\alpha + \|f\|_\infty < +\infty\}$.

- (a) Soit $f \in C^{0, \alpha}(\Omega)$, montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction \bar{f} continue sur $\bar{\Omega}$ et que $\bar{f} \in C^{0, \alpha}(\bar{\Omega})$.
- (b) On suppose Ω borné.
 - i. Montrer que si $\alpha < \alpha'$ alors $C^{0, \alpha'}(\Omega) \subset C^{0, \alpha}(\Omega)$.
 - ii. On suppose de plus que Ω est convexe. Montrer que si $f \in C^1(\Omega)$ et Df est borné alors $f \in C^{0, \alpha}(\Omega)$ pour tout $\alpha < 1$.
 - iii. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $C^{0, \alpha}(\Omega)$ est constitué de fonctions localement constantes.
- (c) On note $\|\cdot\|_{C^{0, \alpha}} = |\cdot|_\alpha + \|\cdot\|_\infty$. Montrer que $(C^{0, \alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{C^{0, \alpha}})$ est un espace de Banach.
- (d) On suppose de nouveau que Ω est borné. Montrer que l'injection $(C^{0, \alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{C^{0, \alpha}}) \hookrightarrow (C^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ est compacte (c'est-à-dire que de toute suite bornée pour $\|\cdot\|_{C^{0, \alpha}}$, on peut extraire une sous-suite convergente pour $\|\cdot\|_\infty$).

Baire et quelques conséquences

7. (a) Montrer qu'un espace métrique complet X vérifie la *propriété de Baire* : toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est dense dans X .
- (b) Montrer qu'un espace vectoriel normé admettant une base infinie dénombrable n'est pas complet.
- (c) Montrer qu'il n'existe pas de partition dénombrable de $[0, 1]$ avec des fermés.
- (d) Montrons que l'ensemble des fonctions continues et nulle part dérivables est dense dans $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$:
- On définit pour chaque n l'ensemble
$$F_n = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \exists x \in [0, 1], \forall y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq n|x - y|\}.$$
Montrer que F_n est un fermé d'intérieur vide.
 - Montrer que si f est dérivable en un point, elle appartient à un F_n . Conclure.
- (e) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que pour tout point x , il existe un entier k vérifiant $f^{(k)}(x) = 0$. Montrer que f est un polynôme.
- (f) Savez-vous montrer qu'il n'existe aucune fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont les points de continuité sont exactement les rationnels ?

Théorèmes de Banach

8. Soient E et F deux espaces de Banach. Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F telle que, pour tout $x \in E$, $(T_n x)$ converge vers une limite notée Tx .
- Montrer que $x \mapsto Tx$ est linéaire.
 - Montrer que $\sup_n \|T_n\| < +\infty$. En déduire que T est continue.
 - Montrer que

$$\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|T_n\|.$$

9. Application ouverte

- Énoncer le théorème de l'application ouverte.
- En déduire que si E et F sont deux Banach et si $T : E \rightarrow F$ est une application linéaire bijective et continue, sa réciproque est continue.
- Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ telles que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ soit des espaces de Banach. Montrer que s'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq C\|x\|_2,$$

alors les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

10. *Autour du graphe fermé.* On considère $T : \underset{f}{(L^2([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})} \rightarrow \underset{f}{(L^2([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})}$.

- Vérifier que $\|\cdot\|_{L^1}$ est une norme sur $L^2([0, 1], \mathbb{R})$.
- Montrer que le graphe de T est fermé.
- Montrer que T n'est pas continu.
- Est-ce que $(L^2, \|\cdot\|_{L^1})$ est complet ?

11. Avec Banach-Steinhaus et Ascoli uniforme.

Soit $E = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. On va montrer le résultat suivant : si F est un sev fermé de E tel que tout élément de F est dérivable, alors F est de dimension finie.

- Si $x_0 \in [0, 1]$ est fixé, on définit $T_y : \underset{f}{E} \rightarrow \underset{f}{\mathbb{R}} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall f \in F, \quad \forall y \in [0, 1] \setminus \{x_0\}, \quad |T_y(f)| \leq M\|f\|_\infty.$$

- Montrer que pour tout $x_0 \in [0, 1]$, la boule unité fermée de F forme une famille équicontinue en x_0 .
- Montrer que la boule unité fermée de F est une partie compacte de F et conclure.